

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XII-a
27.02.2015

Subiectul I.(40 puncte)

Fie $G = \{A_x / x \in \mathbb{R}\}$, $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Arătați că (G, \cdot) este grup abelian;
- Demonstrați că (G, \cdot) este izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$;
- Calculați A^{2015} , $A \in G$.

prof. Anca Cristina Hodorogea, ISJ Cluj

Subiectul II.(10 puncte)

Fie (G, \cdot) un grup finit cu proprietatea că funcția $f : G \rightarrow G$, $f(x) = x^2$ este automorfism de grupuri. Arătați că mulțimea G are un număr impar de elemente.

prof. Simona Pop, Colegiul "Augustin Maior" Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

a) Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x \cdot \sin \frac{1}{x} dx$.

prof. Mirela Blaga, Liceul Teoretic „Alexandru Papiu Ilarian” Dej

b) Să se arate că $\int_0^1 \sum_{k=1}^n \ln(1+kx) dx \leq \frac{n(n+1)}{4}$.

prof. Teodor Poenaru, Liceul teoretic „Nicolae Bălcescu” Cluj-Napoca

Subiectul IV.(20 puncte)

Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, primitivabile, ce verifică relația: $F(x) + \ln(f(x)) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f și $F(0) = 0$.

prof. Cristian Petru Pop, ISJ Cluj

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!